30.01.97.

TEMA 2: « DISTRIBUCIONES MUESTRALES DE PROBABILIDAD »

* EJEMPLOS:

1.-

DATOS

X: { 1, 2, 3, 4 }

n	$\bar{X}$	$P(\bar{X})$
1,1	1	1/16
1,2	1'5	1/8
1,3	2	3/16
1,4	2'5	1/4
2,1	1'5	1/8
2,2	2	3/16
2,3	2'5	1/4
2,4	3	3/16
3,1	2	3/16
3,2	2'5	1/4
3,3	3	3/16
3,4	3'5	1/8
4,1	2'5	1/4
4,2	3	3/16
4,3	3'5	1/8
4,4	4	1/16

2.-

DATOS

$X \to Normal(\mu_x = 15'3 \; ; \; \sigma_x = 4'10)$

$n = 36 \to \bar{X} \to N\left(15'3 ; \frac{4'1}{\sqrt{36}}\right)$

Calcularemos la probabilidad de que el pago promedio de la muestra sea menor a 14:

$$P(\bar{X} \leq 14) = P\left(\frac{\bar{x} - 15'3}{4'1/\sqrt{36}} \leq \frac{14 - 15'3}{4'1/\sqrt{36}}\right)$$

$P(Z \leq -1'9024)$; $P(\bar{X} \leq 14) = 0'0287$, $P(\bar{X} \leq 14) = 2'87\%$

Interpretación. Por ser la probabilidad de que la media muestral sea inferior o igual a 14 muy baja (2'87%), podemos afirmar que los datos proporcionados por la cía. telefónica eran correctos.

3.-

a) $\chi^2_{0'95; 16} = 7'962$

b) $\chi^2_{0'8; 10} = 6'113$

$n = 10$ $\quad \alpha = 0'10 \to 4'865$ $\quad 0'05 \to 6'737 - x$ $\quad x = 6'113$

$\alpha = 0'20 \to x$ $\quad 0'15 \to 1'872$

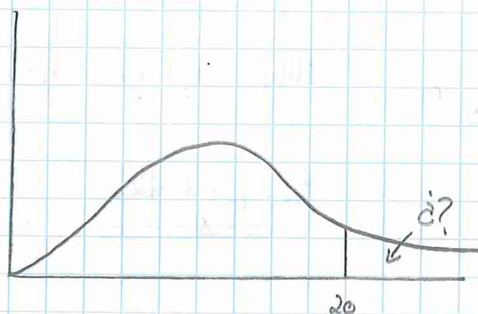
$\alpha = 0'25 \to 6'737$

4.-

DATOS

$P[X>20]$ ¿?

n=11



• $\mathcal{E}_\mu$ n=11

$\alpha = 0'95 \longrightarrow 19'675$ $1-\alpha = 0'025 \longrightarrow 2'248$

$\alpha = x \longrightarrow 20$ $1-\alpha = x-0'95 \longrightarrow 0'325$ $1-\alpha = 0'9536$

$\alpha = 0'975 \longrightarrow 21'923$

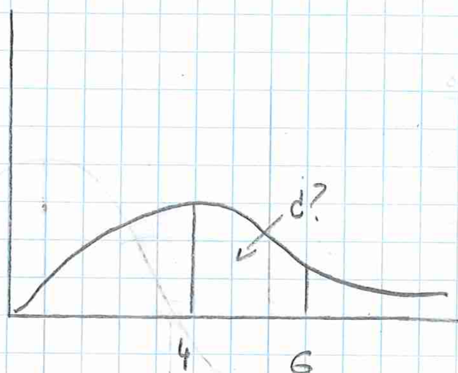
$P[X>20] = 4'64\%$

5.-

DATOS

$P[4 \leq X \leq 6]$ ¿?

n= 10.



$P[4 \leq X \leq 6] = P[X \leq 6] - P[X \leq 4] = 0'19 - 0'0532 = 0'1368$

• $P[X \leq 6]$ n=10.

$1-\alpha = 0'25 \longrightarrow 6'737$

$1-\alpha = x \longrightarrow 6$

$1-\alpha = 0'1 \longrightarrow 4'865$

$0'15 \longrightarrow 1872$

$0'25-x \longrightarrow 0'737$

• $P[X \leq 4]$ n=10

$1-\alpha = 0'10 \longrightarrow 4'865$

$1-\alpha = x \longrightarrow 4$

$1-\alpha = 0'05 \longrightarrow 3'94$

$0'05 \longrightarrow 0'925$

$0'1-x \longrightarrow 0'865$

6.-

DATOS

$\alpha = 0'05$

$n = 10$

Hallo el pto. crítico en una distribución "t":

$t_{0'05;\,10} = 1'8125$

7.-

DATOS

$\alpha = 0'3$

$n = 12$

Calculo el pto. crítico para la "t":

$\alpha = 0'5 \longrightarrow t = 0$

$\alpha = 0'3 \longrightarrow X$

$\alpha = 0'25 \longrightarrow 0'6955$

$\alpha = 0'25 \longrightarrow -0'6955$

$\alpha = 0'2 \longrightarrow -X$

$X =$

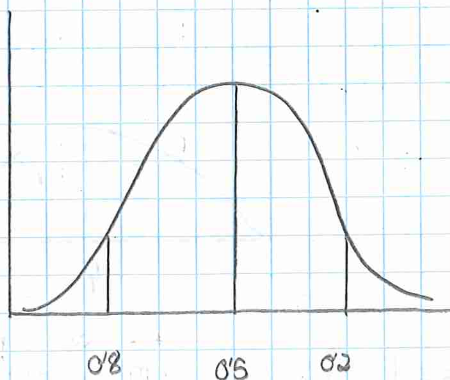
$t_{0'3;\,12} = 0'5564$

8.-

DATOS

$\alpha = 0'8$

$n = 12$



$n = 12$

$\alpha = 0'25 \longrightarrow 0'6955$

$\alpha = 0'2 \longrightarrow X$

$\alpha = 0'1 \longrightarrow 1'3562$

$\alpha: 0'05 \longrightarrow 0'6955 - X$

$\alpha: 0'15 \longrightarrow -0'6607$

$X = 0'4752$

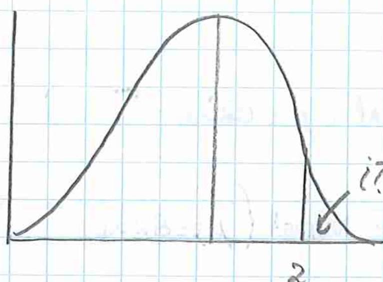
$t_{0'8;\,12} = -0'4752$

9.-

DATOS

P[x>2] ¿?

n= 10



• n= 10.

α = 0'05 ⟶ 1'8125 α = 0'05 - x ⟶ -0'1875

α = X ⟶ 2 α = 0'025 ⟶ -0'4156

α = 0'025 ⟶ 2'2281

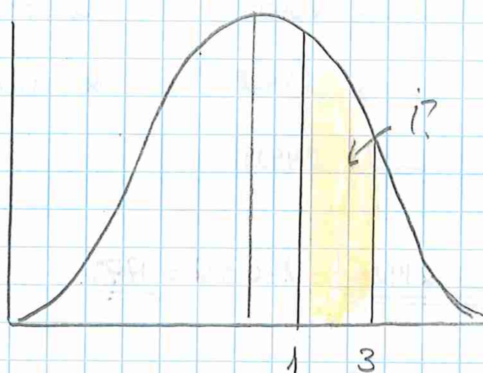
P[X>2] = 3'87%

10.-

DATOS

P[1≤ X≤ 3]: ¿?

n= 5



P[1≤X≤3]= P[X>1] - P[X>3] = 0'195 - 0'016; P[1≤X≤3] = 17'8%

• n=5 P[X>1]:

α = 0'25 ⟶ 0'7267

α = X ⟶ 1

α = 0'1 ⟶ 1'4759

α = 0'25 - x ⟶ -0'2733

α = 0'15 ⟶ -0'7492

• n=5 P[X>3]:

α = 0'025 ⟶ 2'5706

α = X ⟶ 3

α = 0'01 ⟶ 3'3649

α = 0'025 - x ⟶ -0'4294

α = 0'015 ⟶ -0'7943

11.-

DATOS

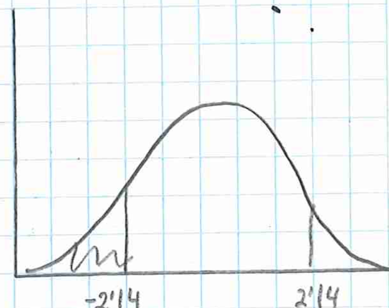
$X \rightarrow \text{Normal}(\mu_x = 825\$; \sigma_x: ?)$

$\downarrow$

$n=25 \rightarrow \bar{X}: \text{Normal}\left(\mu_{\bar{x}} = 825\$; \sigma_{\bar{x}} = \sigma_x/\sqrt{n}\right)$

Calculo la probabilidad $P[X \leq 780\$]$.

$P\left[\frac{\bar{X}_{25} - 825}{105/\sqrt{25}} \leq \frac{780-825}{105/\sqrt{25}}\right]$; $P[t_{24} \leq -2'1428]$



$P[t_{24} \leq -2'1428] = 1 - P[t_{24} \geq -2'1428]$

- $n: 24$ $P[t_{24} \geq 2'1428]$

$\alpha = 0'025 \longrightarrow 2'0639$ $\alpha = 0'025 - x \longrightarrow -0'0789$

$\alpha = x \longrightarrow 2'1428$ $\alpha = 0'015 \longrightarrow -0'4283$

$\alpha = 0'01 \longrightarrow 2'4922$

$P[t_{24} \leq -2'1428] = 1 - 0'022 = 97'7\%$

Interpretación: Por ser esta probabilidad muy alta no aceptaremos los datos proporcionados por la cía.

12.-

DATOS

$\sigma_x^2 = 0'0010$

$\downarrow$

$n = 21$

$\sigma_x^2 = 0'0016$.

Calculo la probabilidad. $P[S^2 \geq 0'0016]$

$P[S^2 \geq 0'0016] = P\left[\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2} \geq \frac{0'0016 \cdot 20}{0'001}\right]$

$P\left[\chi^2_{20} \geq 32\right] = 1 - P\left[\chi^2_{20} \leq 32\right]$

$\circ [\chi^2_{20} \leq 32]$ en $n=20$

Para $1-\alpha = 0'95 \longrightarrow 31'410$ $\quad 0'95-x \longrightarrow -0'59$

$1-\alpha = x \longrightarrow 32$ $\quad -0'025 \longrightarrow -2'79$ $\quad \Big\} \; 1-\alpha = 95'53\%$

$1-\alpha = 0'975 \longrightarrow 34'170$

$$P[\chi^2_{20} \geq 32] = 1 - P[\chi^2_{20} \leq 32] = 1 - 0'955 = 4'46\%$$

Interpretación: Por ser la probabilidad de $S^2 \geq 0'0016$ muy pequeña, podemos afirmar que la probabilidad de que la varianza muestral sea de 0'001 es muy grande.

13.-

DATOS

$F_{0'05(12;18)}$ ¿?

$F_{0'05;12;18} = 2'34$

14.-

DATOS

$F_{\alpha;12;15}$ entre 2'5 y 3.

$P[2'5 \leq X \leq 3] = 0'049 - 0'024 = 0'025$

En 12; 15

$\alpha = 0'05 \longrightarrow 2'48$

$\alpha = x \longrightarrow 2'5$

$\alpha = 0'025 \longrightarrow 2'96$

$0'05 - x \longrightarrow -0'02$

$0'025 \longrightarrow -0'48$

$\alpha = 0'049$

En 12; 15

$\alpha = 0'025 \longrightarrow 2'96$

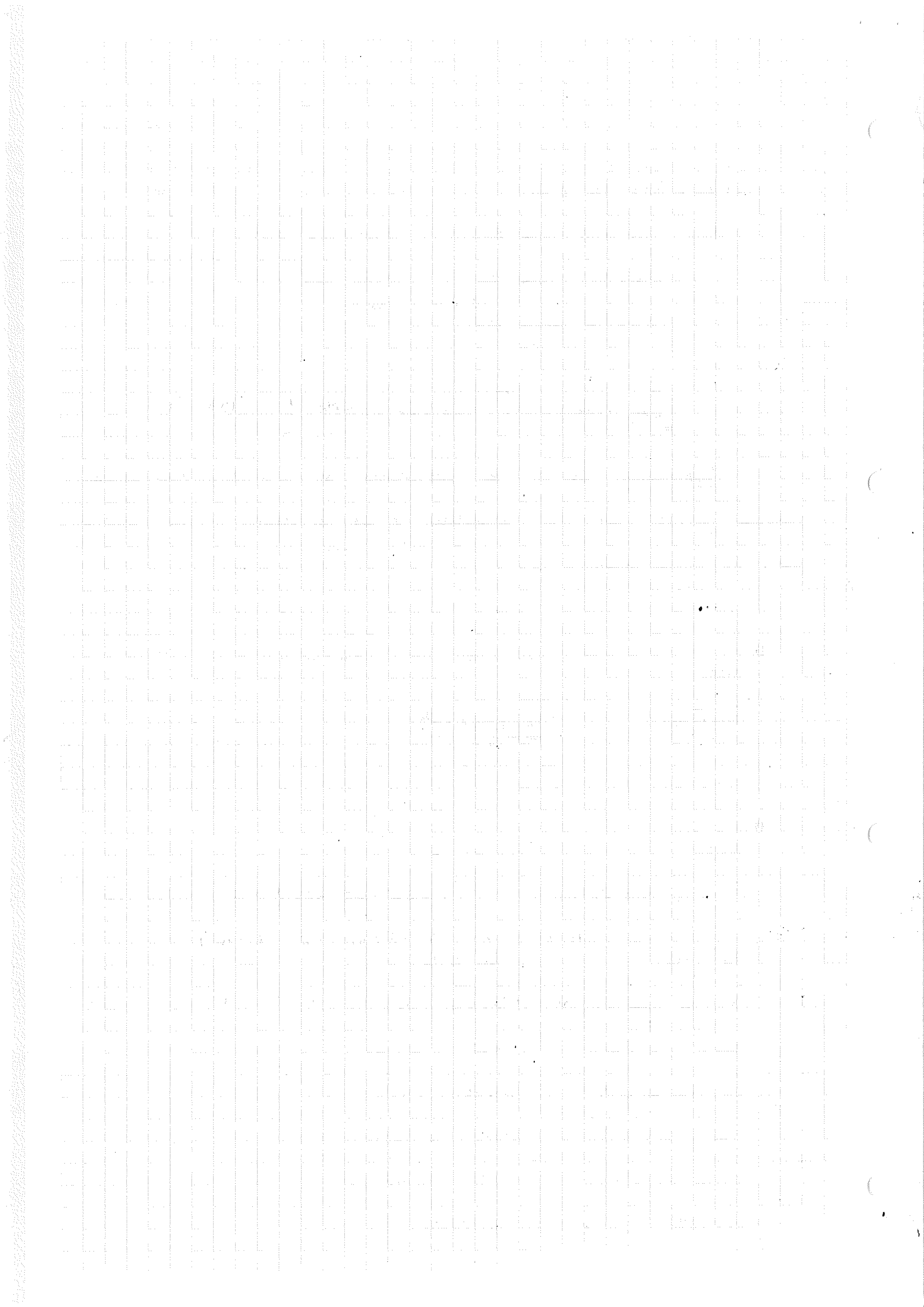
$\alpha = x \longrightarrow 3$

$\alpha = 0'01 \longrightarrow 3'67$

$0'025 - x \longrightarrow -0'04$

$0'015 \longrightarrow -0'67$

$\alpha = 0'024$



* PROBLEMAS

1.-

DATOS

X: {2, 3, 6, 8, 11}

n = 2

a) Media poblacional:

$\mu_X = 2+3+6+8+11 / 5 \Rightarrow \mu_X = 6.$

b) Hallo la desviación típica de la población:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(2-6)^2+(3-6)^2+(6-6)^2+(8-6)^2+(11-6)^2}{5}} ; \sigma_X = 3'29.$$

c) Media de la distribución muestral de medias:

$\mu_{\bar{X}} = \mu_X \Rightarrow \mu_{\bar{X}} = 6$

d) Hallo la desviación típica de la distribución muestral de medias:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} ; \sigma_{\bar{X}} = \frac{3'29}{\sqrt{2}} ; \sigma_{\bar{X}} = 2'326$$

2.-

DATOS

Vble. "X" → "Longitud de una pieza": $X \rightarrow N(\mu_X = 20; \sigma^2 = 0'04)$

vble. "Y" → "Longitud de una caja": $Y \rightarrow N(\mu_X = 20,615; \sigma^2 = 0'05)$.

a) Calculo la probabilidad de que al coger una pieza no quepa en la caja:

Nueva vble. aleatoria: $W = Y - X$ → "W" → Diferencia entre las longitudes:

$W \rightarrow N(\mu_X = +0'615; \sigma^2 = 0'09)$

$$P[W \leq 0] = P\left[Z \leq \frac{0 - 0'615}{0'3}\right] = P[Z \leq -2'05] = 0'0202$$

La probabilidad es de 2'02%

b) Hallo la probabilidad de que la longitud de la caja supere a la de la pieza en 0'231 cm. por lo menos.

$$P[W \geq 0'231] = 1 - P\left[Z \leq \frac{0'231 - 0'615}{0'3}\right] = 1 - P[Z \leq -1'28] = 1 - 0'1003 = 0'8997$$

La probabilidad es del 89'97%

3.-

a) Hallo la media poblacional.

$$\mu_X = \frac{2+3+6+8+11}{5} \; ; \; \mu_X = 6$$

b) Calculo la desviación típica de la población:

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{(2-6)^2 + (3-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2 + (11-6)^2}{5}} \; ; \; \sigma_X = 3'28$$

c) Calculo la media muestral:

$$\mu_{\bar{x}} = \mu_X \Rightarrow \mu_{\bar{x}} = 6$$

d) Calculo la desviación típica de la muestra:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \; ; \; \sigma_{\bar{x}} = \frac{3'28}{\sqrt{2}} \sqrt{3/4} \; ; \; \sigma_{\bar{x}} = 2'008$$

4.-

DATOS

vble. al. "X" → "longitud de la pieza en mm".

$X \to N(\mu_x = 12; \sigma_x^2 = 0'04)$

a) Distribución de la pérdida media por pieza diaria en n=16:

v.a. $\bar{Y}$ → "pérdida media de pts por pieza al día".

$Y \to N(\mu_{\bar{Y}} = 1200; \sigma_{\bar{Y}} = 20)$

$\sigma_{\bar{Y}}^2 = 100^2 * 0'04 = 400$

b) Calculo la probabilidad de que la pérdida diaria media sea mayor que 1.203 pts:

$P[Y \geq 1.203] = 1 - P[Y \leq 1.203]$

$P[Y \geq 1.203] = 1 - P\left[Y \leq \dfrac{1.203 - 1.200}{20/\sqrt{16}}\right] = 1 - P[Y \leq 0'6] = 1 - 0'7257 = 0'2743.$

La probabilidad es de un 27'43%.

5.-

DATOS CHEVISHEV

$X \to N(\mu_x = \mu; \sigma_x = 10)$

↓

$n = ¿?$ $\bar{X} \to N(\mu_{\bar{X}} = \mu_x; \sigma_{\bar{X}} = 10/\sqrt{n})$

Calculo el tamaño de "n" necesario para que la probabilidad de $\bar{X}$ sea por lo menos 0'75 de que se encuentre a menos de 0'1 de μ:

$P[\mu - 0'1 \leq \bar{X} \leq \mu + 0'1] \geq 0'75$

Aplicamos Chevishev:

$$P\left[|\bar{X}-E(\bar{X})|<\varepsilon\right]>1-\frac{Var(\bar{x})}{\varepsilon^2}$$

$$0'75=1-\frac{Var(\bar{x})}{\varepsilon^2};\quad 0'75=1-\frac{Var(x)/n}{0'1^2};\quad \frac{100}{0'1^2 n}=0'25 \Rightarrow n=40.000$$

¡¡OJO!!: CHEVISHEV

6.-

DATOS

v.a. X : {0,1,4,6}.

n = 12

n=2	$\bar{X}$
0,0	0
0,1	1/2
0,4	2
0,6	3
1,0	1/2
1,1	1
1,4	2'5
1,6	3'5
4,0	2
4,1	2'5
4,4	4
4,6	5
6,0	3
6,1	3'5
6,4	5
6,6	6

$$\mu_{\bar{x}}=\frac{0+1/2\cdot 2+2\cdot 2+3\cdot 2+1+2'5\cdot 2+3'5\cdot 2+4+5\cdot 2+6}{16}$$

$\mu_{\bar{x}}=2'75$ $\quad(\mu_x=\mu_{\bar{x}})$

$$\sigma_x^2=\frac{(0-2'75)^2+(1-2'75)^2+(4-2'75)^2+(6-2'75)^2}{4}$$

$\sigma_x^2=5'6875$

$$\sigma_{\bar{x}}^2=\frac{\sigma_x^2}{n}=5'6875/2$$

$\sigma_{\bar{x}}^2=2'84375$

7.-

DATOS

v.a. "X" → "Duración de las llamadas a larga distancia".

$X \to N(\mu_X = 8; \sigma_X = 2)$

↓

$n = 25$.

a) Cálculo el error estándar de la distribución muestral de medias:

$\sigma_{\bar{X}} = \sigma_X / \sqrt{n}$; $\sigma_{\bar{X}} = 2/5$; $\sigma_{\bar{X}} = 0'4$

b) Cálculo el porcentaje de medias muestrales entre 7'8 y 8'2 min:

$\bar{X} \to N(\mu_{\bar{X}} = 8, \sigma_{\bar{X}} = 0'4)$

$P[7'8 \leq \bar{X} \leq 8'2] = P[\bar{X} \leq 8'2] - P[\bar{X} \leq 7'8] = 0'6915 - 0'3085 = 0'383$

$P[\bar{X} \leq 8'2] = P\left[z \leq \frac{0'2}{0'4}\right] = P[z \leq 0'5] = 0'6915$

$P[\bar{X} \leq 7'8] = P\left[z \leq \frac{-0'2}{0'4}\right] = P[z \leq -0'5] = 0'3085$

c) $n = 100$. Cálculo el porcentaje de llamadas entre los 7'8 y 8'2 min:

$\sigma_{\bar{X}} = 2/10$; $\sigma_{\bar{X}} = 0'2$

$P[7'8 \leq \bar{X} \leq 8'2] = P[\bar{X} \leq 8'2] - P[\bar{X} \leq 7'8] = 0'8413 - 0'1587 = 0'6826$

$P[\bar{X} \leq 8'2] = P[z \leq 0'2/0'2] = P[z \leq 1] = 0'8413$

$P[\bar{X} \leq 7'8] = P[z \leq -0'2/0'2] = P[z \leq -1] = 0'1587$

d) Observamos que al aumentar el tamaño de la muestra aumenta la probabilidad, de ahí que disminuya la varianza: ha de ser más preciso.

8.-

DATOS

v.a. X → "diámetro de las bolas de billar".

$X \to N(\mu_x = 20; \sigma_x = 1)$

↓

n = 100

a) La naturaleza de la extracción efectuada será: m.a.s de tamaño 100.

b) La vble. aleatoria $\bar{X}$ sigue una distribución NORMAL por el TCL.

c) Determino: $E(\bar{x})$ y $\sigma(\bar{x})$.

$$\bar{X} \to N(\mu_{\bar{x}} = 20, \sigma_{\bar{x}} = 1/\sqrt{100})$$

9.-

DATOS

v.a. X → "cuenta de gastos de comidas de los ejecutivos".

$X \to N(\mu_x = 10\$; \sigma_x = 4\$)$

↓

n = 16 cuentas.

a) Calculo por debajo de qué valor en dinero caerá el 99% de las medias muestrales:

$z = 2'325 \Rightarrow$ Destipifico: $\dfrac{x-10}{4/4} = 2'325$; $x = 12'325\$$

b) Calculo el porcentaje de medias muestrales entre 8\$ y 12\$:

$\sigma_{\bar{x}} = 4/4 = 1.$

$P[8 \leq \bar{X} \leq 12] = P[\bar{X} \leq 12] - P[\bar{X} \leq 8] = 0'9772 - 0'0228 = 95'44\%$

$P[\bar{X} \leq 12] = P[z \leq 12-10/1] = P[z \leq 2] = 0'9772$

$P[\bar{X} \leq 8] = P[z \leq 8-10/1] = P[z \leq -2] = 0'0228$

d) La suposición que se hace al resolver a) y b) es que $n \geq 30$. (NORMAL)

e) $n = 64$. ; Por el TCL suponemos que $\bar{x}$ sigue una distribución normal. y que $N \to \infty$

10.-

DATOS

v.a. X: " Tensión de ruptura del material ".

σ_x: 25 libras.

μ_x: ¿?

Calculo el valor de la tensión de ruptura promedio del proceso:

$$P[\bar{X} \geq 250] = 0'95 \Rightarrow P[\bar{X} \leq 250] = 1 - 0'95 = 0'05.$$

$$P\left[Z \leq \frac{250 - \mu_x}{25/\sqrt{50}}\right] = 0'05 \quad \text{Busco en tablas: } Z = -1'645$$

$$\frac{250 - \mu_x}{25/\sqrt{50}} = -1'64 \ ; \ 250 - \mu_x = -5'798 \ ; \ \mu_x = 255'8$$

11.-

DATOS

A: {1,3,4}

B: {2,6}

a) Formo la distribución muestral D = (A - B)

muestras	X_1	X_2	D
1	1	2	-1
2	1	6	-5
3	3	2	1
4	3	6	-4
5	4	2	2
6	4	6	-2

D {

-1	1/6
-5	1/6
1	1/6
-4	1/6
2	1/6
-4	1/6

b) Calculo la media de D:

$$\mu_D = \frac{-5-3-2-1+1+2}{6} \; ; \; \mu_D = -1'33$$

c) Calculo la desviación típica de D:

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{(-1-1'33)^2+(-5-1'33)^2+(1-1'33)^2+(-3-1'33)^2+(2-1'33)^2+(-2-1'33)}{6}}$$

$\sigma_D = 2'357$

12 –

DATOS

v.a. "X" → "Nº de aciertos en la prueba de aptitud".

$X \to N(\mu_X = 1000; \sigma_X = 125)$. $\quad * \; \sigma_{\bar{X}} = 125/10 = 12'5$

↓ $n = 100$

a) Calculo $P(985 < \bar{X} < 1015)$:

$P(985 < \bar{X} < 1015) = P(\bar{X} < 1015) - P(\bar{X} < 985) = 0'8849 - 0'1151 = 76'98\%$

$P(\bar{X} < 1015) = P\left[z \leq 1015 - 1000/12'5\right] = P[z \leq 1'2] = 0'8849$

$P(\bar{X} < 985) = P\left[z \leq 985 - 1000/12'5\right] = P[z \leq -1'2] = 0'1151$

b) Calculo $P(\bar{X} > 1020)$:

$P(\bar{X} > 1020) = 1 - P(\bar{X} < 1020) = 1 - P\left[z \leq 1020 - 1000/12'5\right] = 1 - P[z \leq 1'6]$

$P(\bar{X} > 1020) = 5'48\%$

c) Calculo $P(\bar{X} < 975)$:

$P(\bar{X} < 975) = P(z \leq 975 - 1000/12'5) = 2'28\%$

13.-

DATOS

$X \to N(\mu_x = 0, \sigma_x = 9)$

↓

$n = 9 \quad \sigma_{\bar{x}} = 3.$

Determino el valor de k:

$P(\bar{x} > k) = 0'20.$

$P(\bar{x} < k) = 1 - P(\bar{x} > k) = 0'80.$

tipifico: $P\left(z \leq \frac{k-0}{3}\right) = 0'8$; $z_1 = 0'845$

$0'845 = k/3$; $k = 2'535$

14.-

DATOS

v.a. "X" → "Duración de la vida de las lámparas".

$X \to N(\mu_x = 1.000\ hrs, \sigma_x = 80)$

↓

$n = 64.$

$\sigma_{\bar{x}} = 10$

Calculo la probabilidad de que el contratista adquiera las lámparas:

$P(\bar{x} \geq 1.050) = 1 - P(\bar{x} < 1.050) = 1 - 1 = 0.$

$P(\bar{x} < 1.050) = P\left[z \leq \frac{1050 - 1000}{10}\right] = P[z \leq 5] = 1.$

15.-

DATOS

v.a. X → "Peso del producto empaquetado".

$X \to N(\mu_x = 25 ; \sigma_x = 0'4)$

v.a. Y → "Peso del paquete vacío".

$Y \to N(\mu_y = 5 ; \sigma_y = 0'2).$

v.a. $\bar{u}$ → "Peso medio de los 100 paquetes".

$\bar{u} = \bar{x} + \bar{y}$

$\bar{X} \to N(\mu_{\bar{x}} = 25, \sigma_{\bar{x}} = 0'04)$

$\bar{Y} \to N(\mu_{\bar{y}} = 5, \sigma_{\bar{y}} = 0'02)$

$\bar{u} \to N(\mu_{\bar{u}} = 30 ; \sigma_{\bar{u}} = 0'0447).$

Calculo la probabilidad de que el peso medio de los 100 paquetes esté comprendido entre:

$\underline{P(89 \leq \bar{u} \leq 94)} = P(\bar{u} \leq 94) - P(\bar{u} \leq 89) = 1 - 1 = \underline{0}$

$P(\bar{u} \leq 94) = P\left[z \leq \frac{94-30}{0'0447}\right] = P[z \leq 1431'76] = 1$

$P(\bar{u} \leq 89) = P\left[z \leq \frac{89-30}{0'0447}\right] = P[z \leq 1319'9] = 1$

16.-

DATOS

v.a. X -> "Duración de las bombillas de A".

$X \to N(\mu_X = 1400; \sigma_X = 200)$

v.a. Y -> "Duración de las bombillas de B".

$Y \to N(\mu_Y = 1200; \sigma_Y = 100)$.

$n = 125$, $\bar{X} - \bar{Y} \to N(\mu_{\bar{X}-\bar{Y}} = 200; \sigma_{\bar{X}-\bar{Y}} = 20)$

Hallo la probabilidad de que las bombillas de A tengan una duración media que sea al menos (a) 160 hrs / (b) 250 hrs más que las de B:

(a) Calculo: $P[\bar{X} - \bar{Y} \geq 160]$:

$\underline{P[\bar{X} - \bar{Y} \geq 160]} = 1 - P[\bar{X} - \bar{Y} \leq 160] = 1 - 0'0228 = \underline{97'72\%}$

$P[\bar{X} - \bar{Y} \leq 160] = P\left[z \leq \frac{160-200}{20}\right] = P[z \leq -2] = 0'0228$

(b) Calculo: $P[\bar{X} - \bar{Y} \geq 250]$:

$\underline{P[\bar{X} - \bar{Y} \geq 250]} = 1 - P[\bar{X} - \bar{Y} \leq 250] = 1 - 0'9938 = \underline{0'62\%}$

$P[\bar{X} - \bar{Y} \leq 250] = P\left[z \leq \frac{250-200}{20}\right] = P[z \leq 2'5] = 0'9938$